Definiční obory

Řešení kvadratických rovnice a nerovnic

Při vyšetřování definičních oborů bude často potřeba řešit kvadratické rovnice a nerovnice. Proto jejich řešení připomeňme.

Uvažujme kvadratickou rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Její kořeny vypočítáme pomocí vzorce $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, kde diskriminant $D = b^2 - 4ac$.

Pro
- $D > 0$ dostáváme dva reálné různé kořeny,
- $D = 0$ dostáváme jeden tzv. dvojnásobný reálný kořen,
- $D < 0$ nemá rovnice reálné kořeny (dostáváme dva komplexně sdružené kořeny).

Při řešení kvadratické nerovnice $ax^2 + bx + c \geq 0$ (znaménko nerovnosti může být případně $>$, $\leq$, $<$) je možné postupovat několika způsoby : graficky, rozkladem na součin s diskusí nebo pomocí tabulky.

Grafické řešení vychází z grafu kvadratické funkce.

Kvadratická funkce $y = ax^2 + bx + c$ nabývá nulových hodnot (a její graf protíná osu *x*) v bodech, které vyhovují rovnici $ax^2 + bx + c = 0$.

Mohou tedy nastat tři případy : graf kvadratické funkce protíná osu *x* ve dvou různých bodech, graf se dotýká osy *x*, graf osu *x* neprotíná.

Pomocí grafu tak snadno určíme řešení kvadratické nerovnice $ax^2 + bx + c \geq 0$, příp. $ax^2 + bx + c \leq 0$.

Pokud je totiž $a > 0$, je parabola, jako graf kvadratické funkce $y = ax^2 + bx + c$, otevřená směrem nahoru, pro $a < 0$ je parabola otevřená směrem dolů.

První nerovnici pak vyhovují ta čísla *x*, pro která leží graf paraboly nad osou *x*. Druhá nerovnice platí pro ta *x*, pro která leží graf paraboly pod osou *x*.

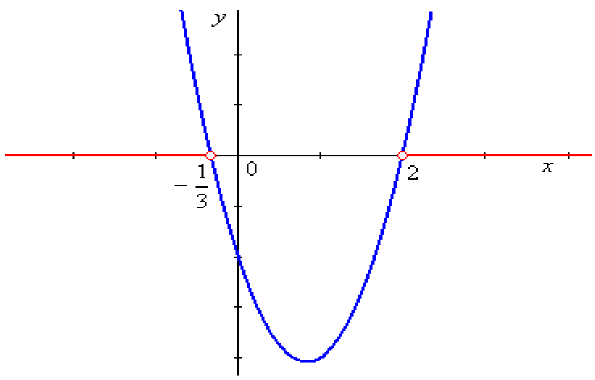
Příklad 1.

Řešte kvadratické nerovnice : a) $3x^2 - 5x - 2 > 0$, b) $2.(1-x)^2 \leq x - 3$.

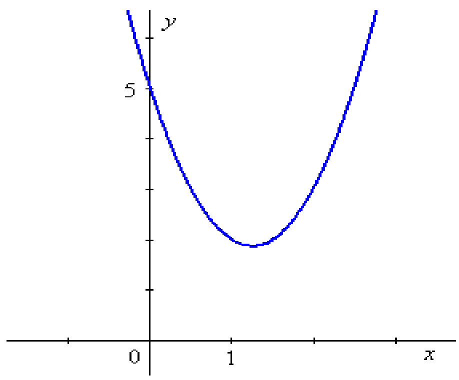
Řešení : Nerovnice budeme řešit graficky.

a) Vyšetříme, pro která $x \in \mathbf{R}$ je funkce $f : y = 3x^2 - 5x - 2$ kladná. Grafem této funkce je parabola, protínající osu *x* v bodech $x_1 = 2$ a $x_2 = -\dfrac{1}{3}$, která je otevřená směrem nahoru.

Z grafu (1.a) je vidět, že funkce je kladná pro $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup (2, \infty)$.



Př. 1.a)



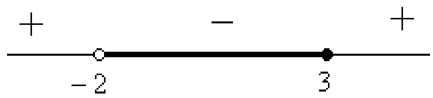
Př. 1.b)

b) Levou stranu upravené nerovnice označíme $f : y = 2x^2 - 5x + 5$. Vyšetříme, pro která $x \in \mathbf{R}$ je funkce $f \leq 0$. Diskriminant $D < 0$, rovnice nemá reálné kořeny a graf funkce *f* neprotíná osu *x*. Vzhledem k tomu, že jde o parabolu, otevřenou nahoru, je (viz. graf 1.b) řešením nerovnice množina $x \in \{ \}$.

Příklad 2.

Řešte nerovnici $\dfrac{x-3}{x+2} \leq 0$.

Řešení : Jde o kvadratickou nerovnici v podílovém tvaru. Nejprve určíme nulové body čitatele ($x = 3$) a jmenovatele ($x = -2$). Tyto body rozdělí číselnou osu na tři podintervaly, ve kterých zlomek $\dfrac{x-3}{x+2}$ nemění své znaménko. Jeho hodnotu v těchto intervalech určíme dosazením libovolného čísla, ležícího uvnitř intervalu. Přitom číslo $x = -2$ není řešením (ve jmenovateli zlomku nesmí být nula), zatímco číslo $x = 3$ je řešením, neboť pro tuto hodnotu je zlomek na levé straně roven nule. V naší úloze dostáváme



Řešením zadané nerovnice je množina čísel $x \in (-2, 3\rangle$.

Popsaný způsob jste asi zapisovali na střední škole podrobněji. Nerovnici $\dfrac{x-3}{x+2} \leq 0$ s nulovými body $x = 3$ a $x = -2$ totiž odpovídá tabulka (vzhledem k tomu, že jmenovatel zlomku musí být různý od nuly, jsou intervaly v krajním bodě $x = -2$ otevřené), kde v posledním řádku jsou znaménka zlomku v jednotlivých intervalech.

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 3\rangle$	3	$\langle 3, \infty)$
$(x-3)$	$-$		$-$		$+$
$(x+2)$	$-$		$+$		$+$
	$+$		$-$		$+$

Řešením zadané nerovnice je množina čísel $x \in (-2, 3\rangle$.

Vyšetřování definičních oborů

Připomeňme, že definiční obor byl definován jako množina reálných čísel, pro která má daná funkce smysl. V případě určování definičního oboru konkrétní složené funkce (případně funkce vzniklé algebraickými operacemi složených funkcí) vycházíme z omezení, určených jednotlivými složkami složené funkce (případně jednotlivých složených funkcí). Na závěr určíme průnik získaných intervalů.

Podmínky, které je třeba brát v úvahu při určování definičních oborů :

- Funkce tvaru $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ je definovaná pro $g(x) \neq 0$,
- Funkce tvaru $y = \sqrt{f(x)}$ je definovaná pro $f(x) \geq 0$,
- Funkce tvaru $y = \log_a f(x)$ je definovaná pro $f(x) > 0$,
- Funkce tvaru $y = \mathrm{tg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x) \neq (2k+1) \cdot \dfrac{\pi}{2}$,
- Funkce tvaru $y = \mathrm{cotg}(f(x))$ je definovaná pro $f(x) \neq k\pi$,
- Funkce tvaru $y = \arcsin(f(x))$ a $y = \arccos(f(x))$ je definovaná pro $-1 \leq f(x) \leq 1$.